3 Geometri

Mål

Når du er ferdig med grunnkurset, skal du

- kunne finne speilingssymmetri og rotasjonssymmetri i figurer i planet
- kjenne til vinkelsummen i en trekant, komplementærvinkler, supplementvinkler, toppvinkler og samsvarende vinkler ved parallelle linjer og kunne bruke dette i utregninger
- bruke Pytagoras' setning til å regne ut lengden av ukjente sider
- kunne begrunne at trekanter er formlike og bruke dette i utregninger

K 3

Ingressen

Her er det naturlig å fortelle litt mer om Pytagoras og pytagoreerne. Det finnes mye stoff om dette på nettet. Forslaget om å hogge skog for å vise Pytagoras' setning og at det er intelligent liv på jorda, er morsomt og kan lede til en diskusjon om matematikk som universelt språk. Vil den sammenhengen Pytagoras' setning beskriver, være kjent også av eventuelle sivilisasjoner utenfor vårt solsystem?

Grunnkurset

Pytagoras' setning

Side 82
I grunnkurset er det lagt inn oppgaver der hypotenusen eller en katet er ukjent. PC-oppgaven gir elevene øvelse i å løse slike oppgaver i Excel. Legg merke til at oppgaver om 30-, 60- og 90-graders trekanter er lagt til rødt kurs, fordi mange elever blander dette inn når de skal bruke formlikhet (og antar at vinklene er 30, 60 og 90 grader).

Formlikhet

Side 86
Merk at når det gjelder trekanter med en felles vinkel og en rett vinkel, kan vi noen ganger også bruke arealbetraktning (beregne arealet av trekanten på to ulike måter) for å finne lengden av de enkelte sidene.

Blått kurs

Mål

Side 98

Når du er ferdig med det blå kurset, skal du

- vite at Pytagoras' setning gjelder for rettvinklede trekanter
- kunne bruke Pytagoras' setning til å regne ut ukjente sider i en trekant
- kunne bruke formlikhet ved utregninger av ukjente sider

Rødt kurs

Mål

Side 104

Når du er ferdig med det røde kurset, skal du kunne

- løse problemer ved å bruke Pytagoras' setning
- regne ut lengden av sider i en trekant med vinkler på 30°, 60° og 90°
- løse sammensatte oppgaver med Pytagoras' setning og formlikhet

K 3

Fasit

Test deg selv

Side 96

1 a) $x = z = 132°$ og $y = 48°$ b) $x = 30°$, $y = 30°$ og $z = 40°$

2 A og C

3 a) 8,0 cm

4 5,2 cm

5 4,0 cm

6 Vinkel A er felles og vinkel ADE og vinkel ABC er samsvarende vinkler ved parallelle linjer og derfor like store. AD er 2,6 cm.

7 Vinkel B er felles, og begge trekantene har en rett vinkel.
AD er 3,5 cm og BD er 6,6 cm.

8 CE er 3,1 cm.
$\triangle ABE \sim \triangle CDE$ fordi
– $\angle DEC$ og $\angle BEA$ er toppvinkler
– $\angle CAB$ og $\angle ACD$ er samsvarende vinkler ved parallelle linjer

Grubliser

Side 97

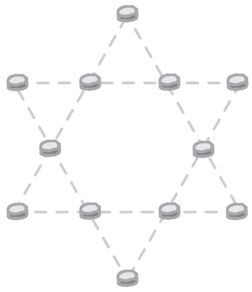
► **Vannmelonen**

Vannmelonen veier 1 kg. Regn først ut hvor mye fruktkjøttet veier.
Denne massen er uforandret og utgjør altså 2 % av massen til melonen etter tørkingen.

► **Kuben**

Kuben kommer til å ha 12 hjørner.

► **Engelsk grublis**
Fire på rad:



Abels hjørne
Side 113

1 B
45 045

2 D

La s være siden og h høyden i trekanten.
Pytagoras' setning gir at $h^2 + (s/2)^2 = s^2$, som gir at $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$.
Arealet er dermed gitt ved
$A = \frac{hs}{2} = \frac{\sqrt{3}\,s^2}{4} \cdot A = 12\sqrt{3}$ gir nå $s^2 = 48$, $s = \sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$,
som igjen gir at omkretsen $3s = 12\sqrt{3}$.

3 B

La sirkelen ha radius r, og la x være sidelengden i det lille kvadratet (det som ligger i halvsirkelen). Dersom vi trekker ei linje fra sentrum i sirkelen til et av hjørnene på sirkelbuen, får vi en rettvinklet trekant der hypotenusen har lengden r og katetene har lengdene x og $\frac{x}{2}$.

Pytagoras' setning gir at $r^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2 = \frac{5}{4}x^2$, og av det følger at arealet av dette kvadratet blir $K_1 = x^2 = \frac{4}{5}r^2$.

La så y betegne sidelengden i det store kvadratet. Fordi diagonalen til kvadratet også er en diameter i sirkelen, har den lengden $2r$. Pytagoras' setning gir at $y^2 + y^2 = (2r)^2$, og derfor blir $y^2 = K_2 = 2r^2$.
Forholdet $K_1{:}K_2$ er da $\frac{2}{5}$.

Utfordring
Side 115

A
Figuren viser at den rettvinklede trekanten med sider a, b og c er formlik trekanten med sider $2a$, $2b$ og $2c$, trekanten med sider $3a$, $3b$ og $3c$ osv. i det uendelige. Med utgangspunkt i det pytagoreiske trippelet (3, 4, 5) kan vi da finne triplene (6, 8, 10) og (9, 12, 15) eller generelt $(3n, 4n, 5n)$.

B
Et pytagoreisk trippel der ingen av tallene har en felles faktor, kaller vi et primitivt trippel. En av katetene må være et oddetall, ellers vil trippelet ha felles faktor 2. Vi kan da gjøre en systematisk undersøkelse der vi starter med at en katet er 5, deretter 7, 9 osv.

I regnearket nedenfor ser du hvordan man kan gjøre det. Katet a er fast i hver undersøkelse, katet b settes lik 1, 2 osv. c finner vi ved å ta rota av summen av a^2 og b^2.

K 3

katet a = 7

katet b	a^2	b^2	c
1	=B$1^2	=A4^2	=ROT(B4+C4)
2	=B$1^2	=A5^2	=ROT(B5+C5)
3	=B$1^2	=A6^2	=ROT(B6+C6)
4	=B$1^2	=A7^2	=ROT(B7+C7)
5	=B$1^2	=A8^2	=ROT(B8+C8)
6	=B$1^2	=A9^2	=ROT(B9+C9)
7	=B$1^2	=A10^2	=ROT(B10+C10)
8	=B$1^2	=A11^2	=ROT(B11+C11)
9	=B$1^2	=A12^2	=ROT(B12+C12)
10	=B$1^2	=A13^2	=ROT(B13+C13)
11	=B$1^2	=A14^2	=ROT(B14+C14)
12	=B$1^2	=A15^2	=ROT(B15+C15)
13	=B$1^2	=A16^2	=ROT(B16+C16)
14	=B$1^2	=A17^2	=ROT(B17+C17)
15	=B$1^2	=A18^2	=ROT(B18+C18)
16	=B$1^2	=A19^2	=ROT(B19+C19)
17	=B$1^2	=A20^2	=ROT(B20+C20)
18	=B$1^2	=A21^2	=ROT(B21+C21)
19	=B$1^2	=A22^2	=ROT(B22+C22)
20	=B$1^2	=A23^2	=ROT(B23+C23)
21	=B$1^2	=A24^2	=ROT(B24+C24)
22	=B$1^2	=A25^2	=ROT(B25+C25)
23	=B$1^2	=A26^2	=ROT(B26+C26)
24	=B$1^2	=A27^2	=ROT(B27+C27)
25	=B$1^2	=A28^2	=ROT(B28+C28)
26	=B$1^2	=A29^2	=ROT(B29+C29)
27	=B$1^2	=A30^2	=ROT(B30+C30)
28	=B$1^2	=A31^2	=ROT(B31+C31)

Det er lett å lese i den fjerde kolonnen når c er et helt tall.

I regnearket nedenfor ser vi at vi har et pytagoreisk trippel når $a = 7$, $b = 24$ og $c = 25$.

katet $a = 7$

katet b	a^2	b^2	c^2
1	49	1	7,07106781
2	49	4	7,28010989
3	49	9	7,61577311
4	49	16	8,06225775
5	49	25	8,60232527
6	49	36	9,21954446
7	49	49	9,89949494
8	49	64	10,6301458
9	49	81	11,4017543
10	49	100	12,2065556
11	49	121	13,0384048
12	49	144	13,892444
13	49	169	14,7648231
14	49	196	15,6524758
15	49	225	16,5529454
16	49	256	17,4642492
17	49	289	18,3847763
18	49	324	19,3132079
19	49	361	20,2484567
20	49	400	21,1896201
21	49	441	22,1359436
22	49	484	23,0867928
23	49	529	24,0416306
24	**49**	**576**	**25**
25	49	625	25,96151
26	49	676	26,925824
27	49	729	27,8926514
28	49	784	28,8617394

Det er enkelt og raskt å prøve andre a-verdier (vi trenger bare å prøve oddetall).

Når vi prøver med a- og b-verdier mellom 1 og 50, finner vi disse pytagoreiske triplene, hvorav åtte er primitive (tallene har ingen felles faktor):

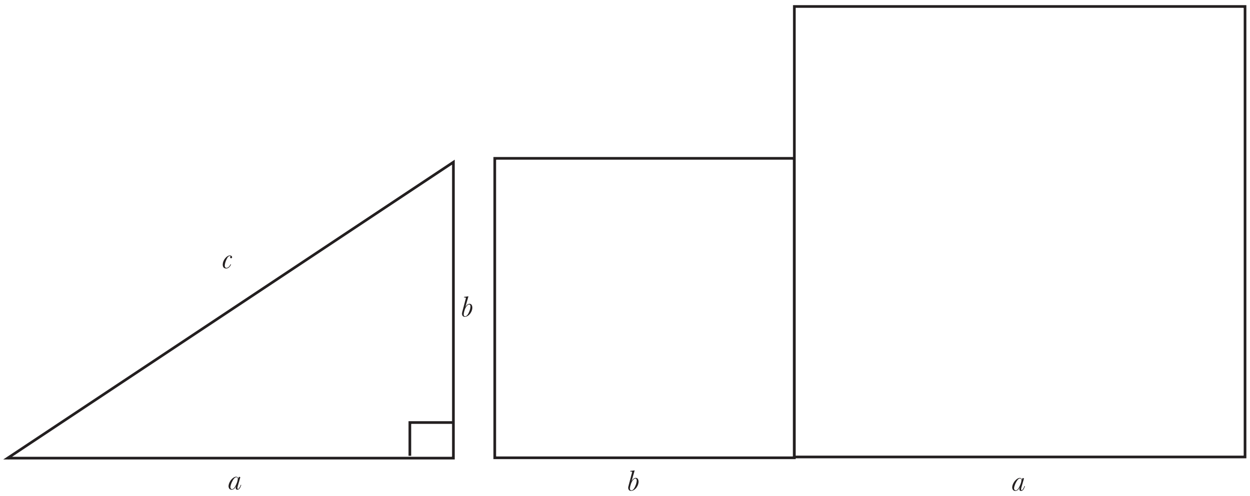
a	b	c	primitivt?
3	4	5	ja
5	12	13	ja
7	24	25	ja
9	12	15	nei, felles faktor 3
9	40	41	ja
15	8	17	ja
15	20	25	nei, felles faktor 5
15	36	39	nei, felles faktor 3
21	20	29	ja
21	28	35	nei, felles faktor 7
27	36	45	nei, felles faktor 9
33	44	55	nei, felles faktor 11
35	12	37	ja
45	24	51	nei, felles faktor 3
45	28	53	ja

K 3

Arbeidsark

Nummer	Tittel	Nivå
3:1	Klipp og vis Pytagoras' setning	grønn
3:2	Regn med Pytagoras' setning	blå
3:3	Formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning	rød
3:4	Formlikhet og topptrekanter	rød
3:5	Det forsvunne kvadratet	rød
3:6	Hvor stor er delen?	rød

Klipp og vis den pytagoreiske læresetninga



A Trekanten er rettvinkla.

B Skriv eit uttrykk for arealet av det vesle kvadratet. ________________

Skriv eit uttrykk for arealet av det store kvadratet. ________________

C Kva kan du kalle lengda av dei prikkete
linjestykka på figuren nedst på sida? ________________

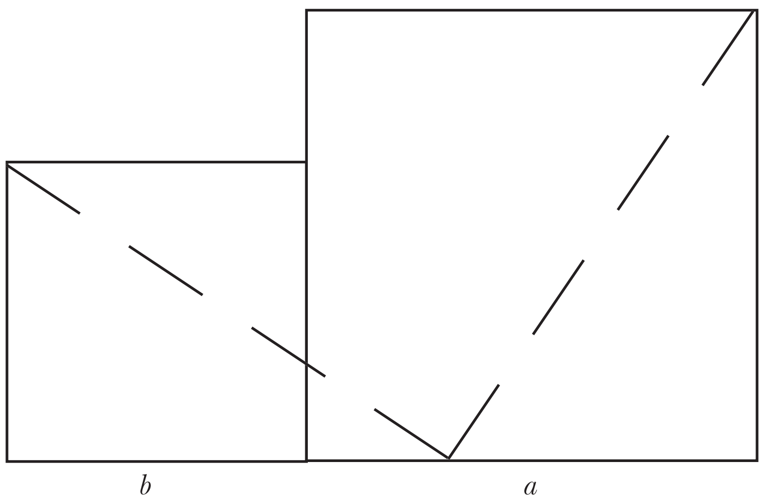
D Klipp langs dei stipla linjene slik at figuren blir delt i tre delar.
Pusle saman bitane til eit kvadrat.

Skriv eit uttrykk for arealet av figuren. ________________

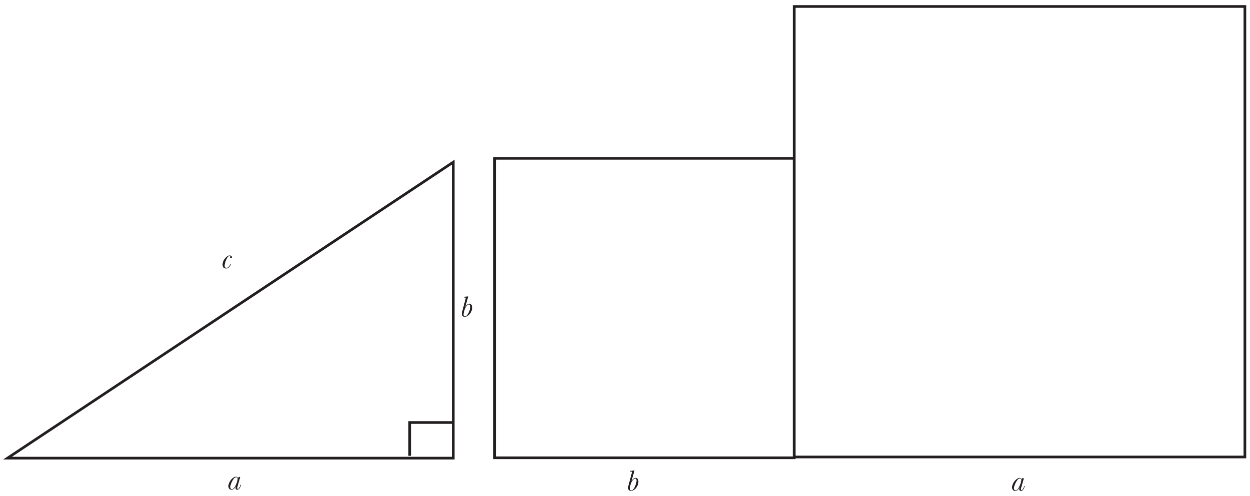
E Forklar korleis du ved å gjere dette har bevist den pytagoreiske læresetninga. ________

____

____



Klipp og vis Pytagoras' setning



A Trekanten er rettvinklet.

B Skriv et uttrykk for arealet av det lille kvadratet. ______________________

Skriv et uttrykk for arealet av det store kvadratet. ______________________

C Hva kan du kalle lengden av de prikkete
linjestykkene på figuren nederst på siden? ______________________

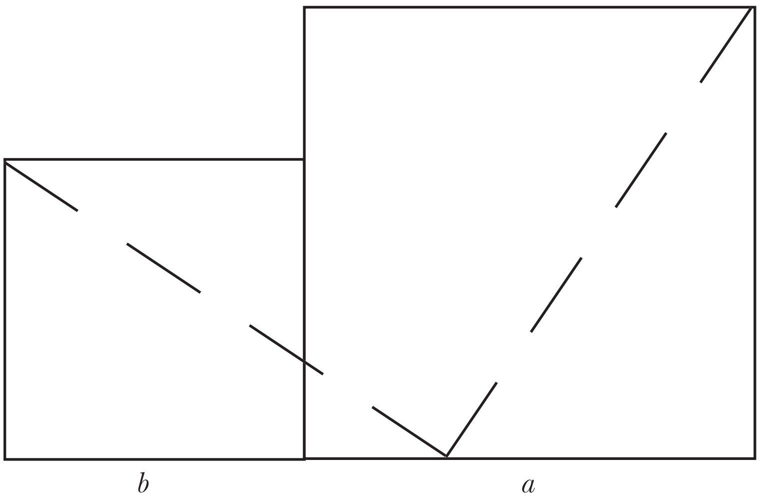
D Klipp langs de stiplede linjene slik at figuren blir delt i tre deler.
Pusle sammen bitene til et kvadrat.

Skriv et uttrykk for arealet av figuren. ______________________

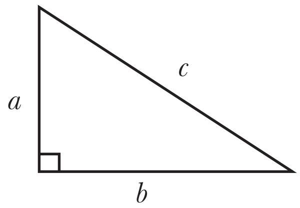
E Forklar hvordan du ved å gjøre dette har bevist Pytagoras' setning. ____________

____

____



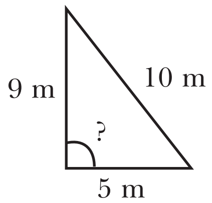
Rekn med den pytagoreiske læresetninga



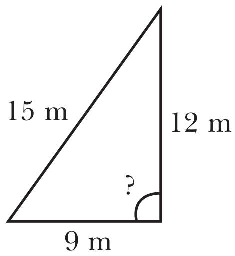
Pytagoras-setninga: $a^2 + b^2 = c^2$

1 Kva for ein eller kva for nokre av trekantane er rettvinkla?

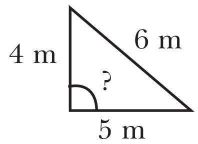
A



B

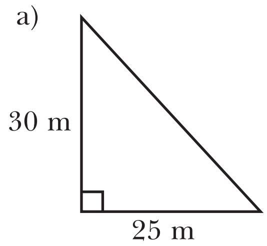


C

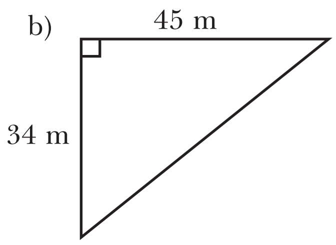


2 Rekn ut lengda av hypotenusen.

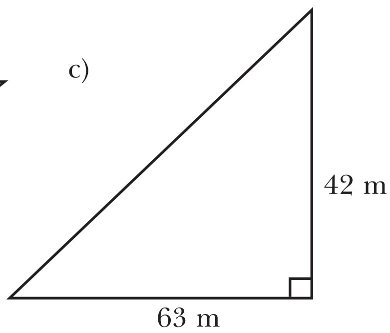
a)



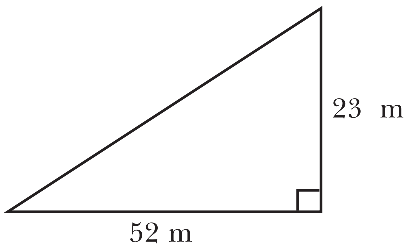
b)



c)

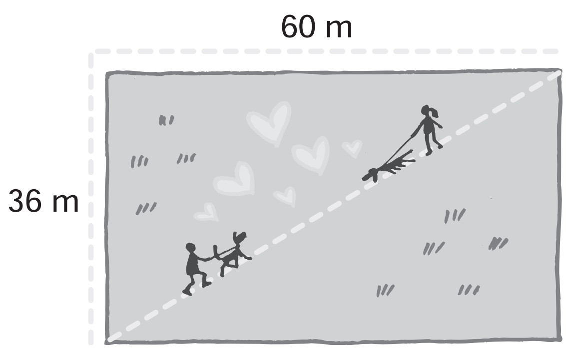


3 Rekn ut lengda av hypotenusen.

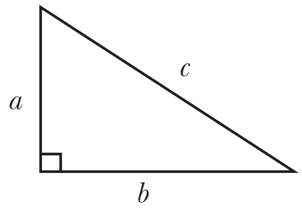


4 Kor lange er stigane?

5 Kor mykje kortare er det å gå på skrå over plenen enn å gå rundt?

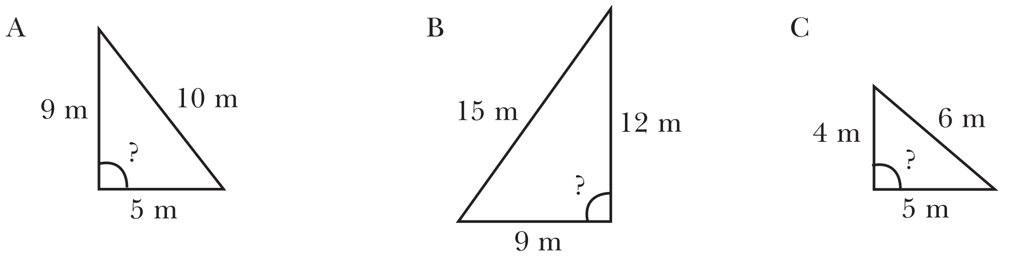


Regn med Pytagoras' setning

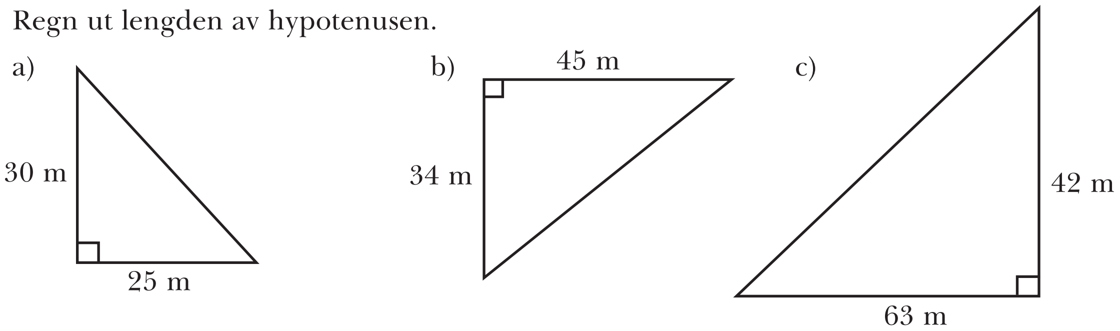


Pytagoras' setning: $a^2 + b^2 = c^2$

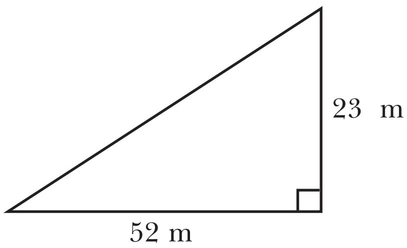
1 Hvilken eller hvilke av trekantene er rettvinklede?



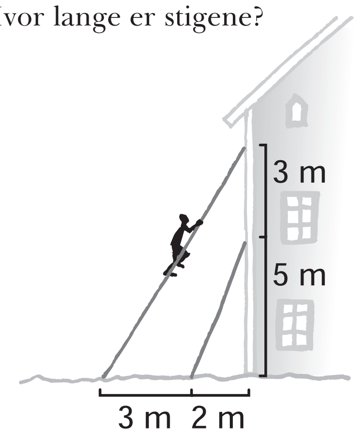
2 Regn ut lengden av hypotenusen.



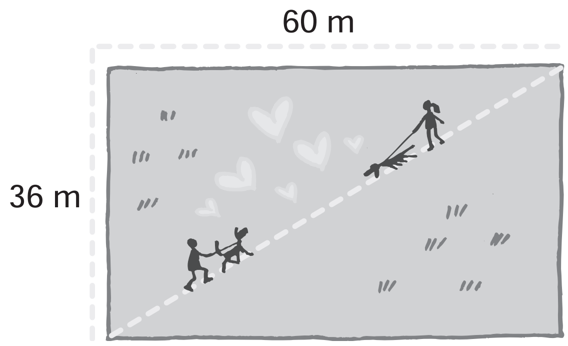
3 Regn ut lengden av hypotenusen.



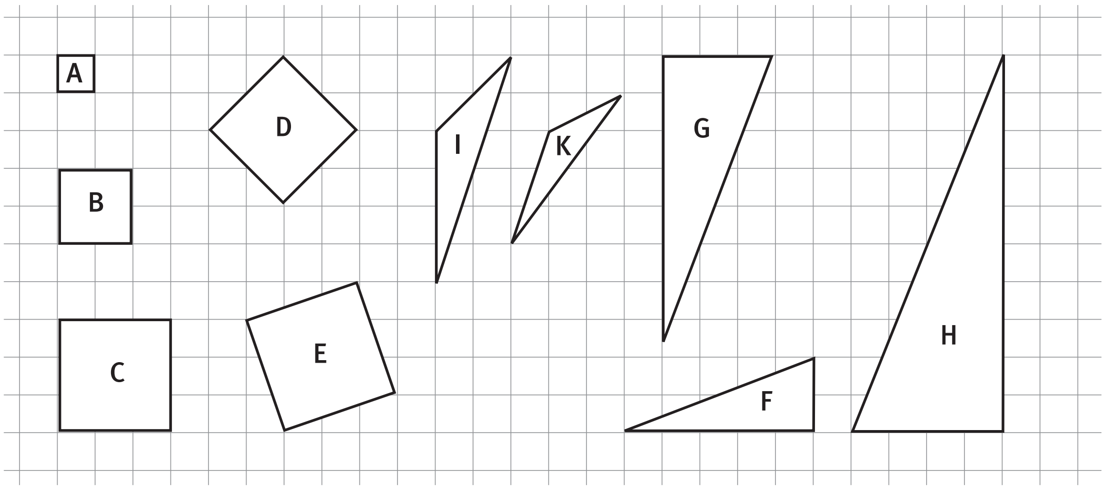
4 Hvor lange er stigene?



5 Hvor mye kortere er det å gå på skrå over plenen enn å gå rundt?



Formlikskap, målestokk og Pytagoras-setninga



Studer figurane.
Forholdet mellom sidene i A og B kan skrivast 1:2.

1 Kva er forholdet mellom sidene i

a) C og D ____________________ b) D og E ____________________

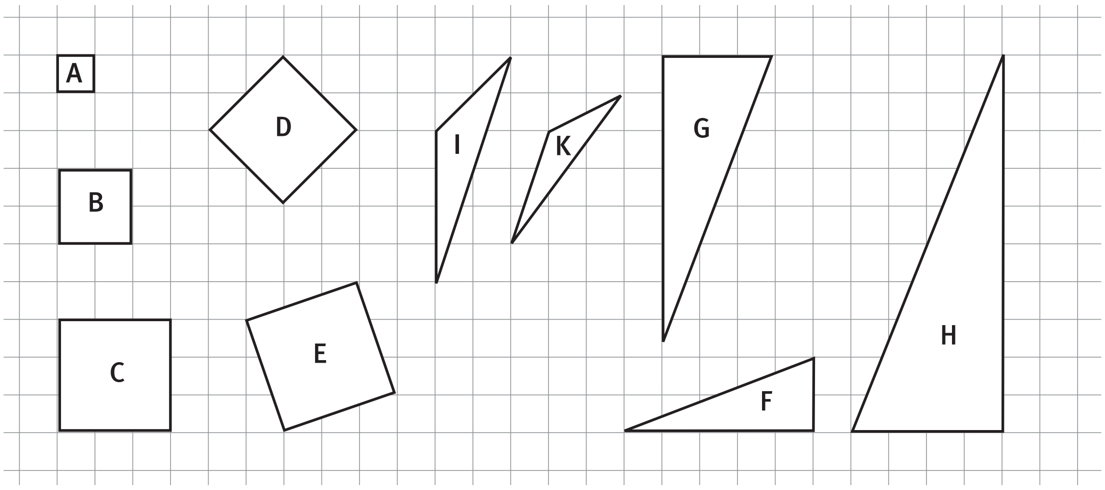
2 Kva er forholdet mellom areala til

a) C og D ____________________ b) D og E ____________________

3 Vis at trekantane F, G og H er formlike.

4 Vis at trekantane I og K er formlike.

Formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning



Studer figurene.
Forholdet mellom sidene i A og B kan skrives 1:2.

1 Hva er forholdet mellom sidene i

a) C og D ____________________   b) D og E ____________________

2 Hva er forholdet mellom arealene til

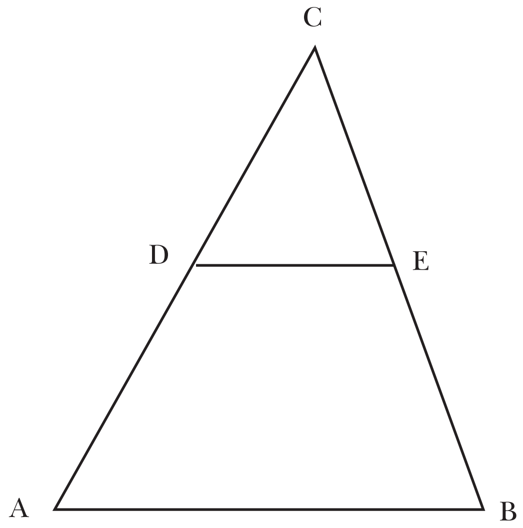
a) C og D ____________________   b) D og E ____________________

3 Vis at trekantene F, G og H er formlike.

4 Vis at trekantene I og K er formlike.

Formlikskap og topptrekantar

I trekanten ABC er DE parallell med AB.

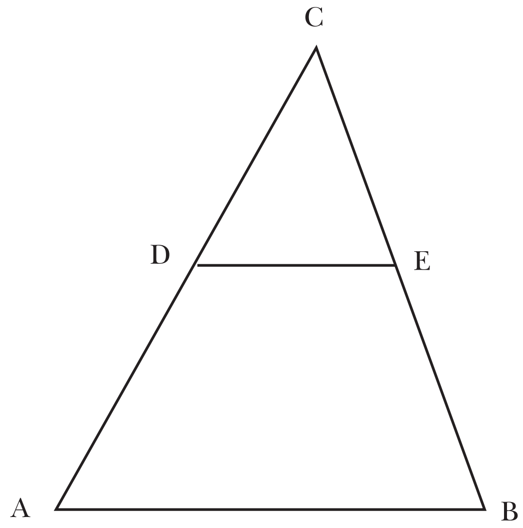


Set inn lengdene som manglar i tabellen. Gjer utrekningane i arbeidsboka di.
Rund av svaret til éin desimal.

	CD	AD	CE	BE	AC	BC	AB	DE
a		24	18	30				
b	12		10	14				
c	18	32		36				
d	6	8	8					
e	8		14	10				
f		6	4		16			
g	5	7						8
h			3	4			5	

Formlikhet og topptrekanter

I trekanten ABC er DE parallell med AB.



Sett inn lengdene som mangler i tabellen. Gjør utregningene i arbeidsboka di.
Rund av svaret til én desimal.

	CD	AD	CE	BE	AC	BC	AB	DE
a		24	18	30				
b	12		10	14				
c	18	32		36				
d	6	8	8					
e	8		14	10				
f		6	4		16			
g	5	7						8
h			3	4			5	

Det forsvunne kvadratet

Dette problemet var kjent på 1800-talet og blei studert av mellom anna Lewis Carroll, forfattaren av *Alice i eventyrland*.

Eit kvadrat med side 8 blir delt opp i to trekantar og to firkantar. Delane blir deretter lagde slik at dei dannar eit rektangel med sider 5 og 13. Sjå på figurane.
Klipp gjerne ut kvadratet og lag rektangelet med dei fire delane.

1 Kor mange ruter inneheld kvadratet? ________________

2 Kor mange ruter inneheld rektangelet? ________________

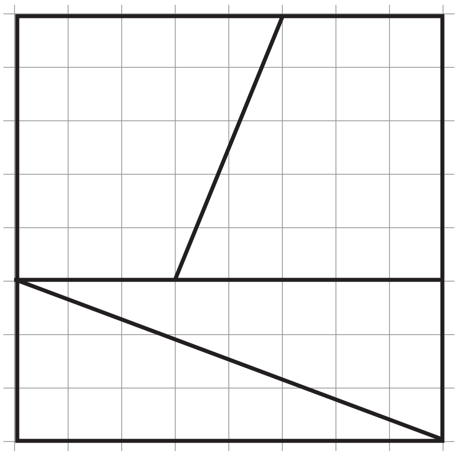
3 Kvar er den siste ruta blitt av?

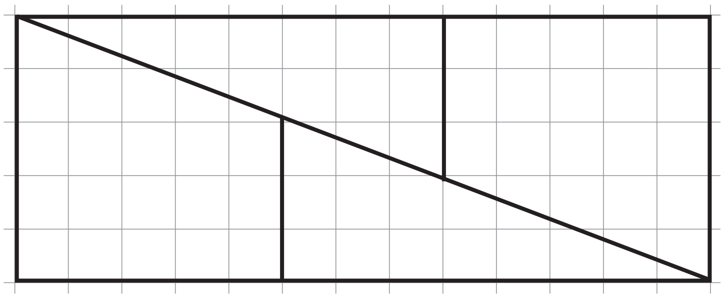
____

____

____

____





Arbeidsark 3:5

BOKMÅL

Det forsvunne kvadratet

Dette problemet var kjent på 1800-tallet og ble studert av blant annet Lewis Carroll, forfatteren av *Alice i eventyrland*.

Et kvadrat med side 8 deles opp i to trekanter og to firkanter. Delene legges deretter slik at de danner et rektangel med sider 5 og 13. Se på figurene.
Klipp gjerne ut kvadratet og lag rektangelet med de fire delene.

1 Hvor mange ruter inneholder kvadratet? ________________

2 Hvor mange ruter inneholder rektangelet? ________________

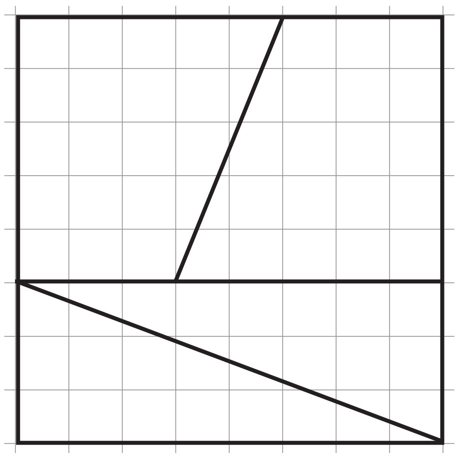
3 Hvor er den siste ruta blitt av?

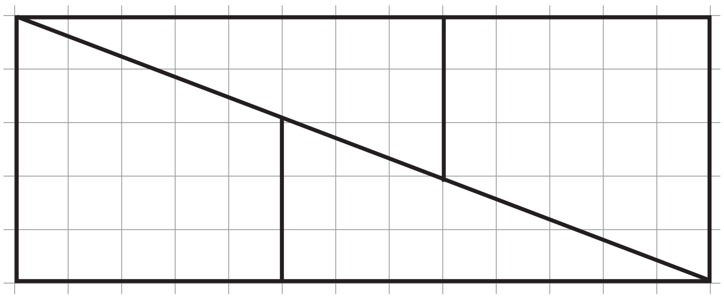
____

____

____

____



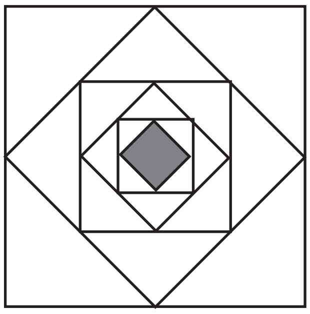


K 3

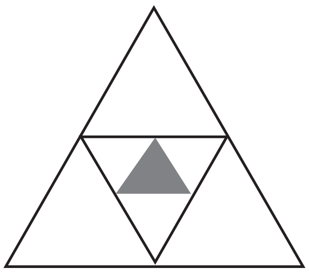
Kor stor er delen?

Kor stor del av heile figuren utgjer den skuggelagde delen?
I kvar figur er den lengste sida $4r$.

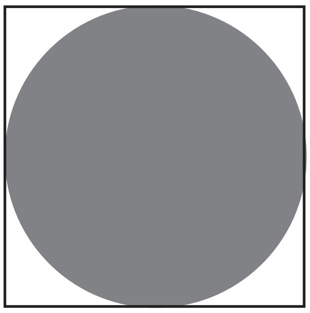
1



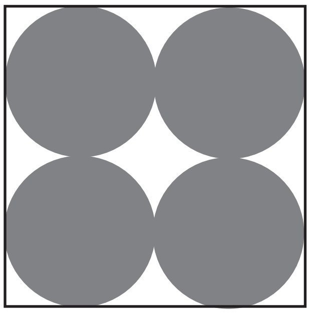
2



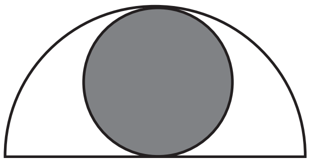
3



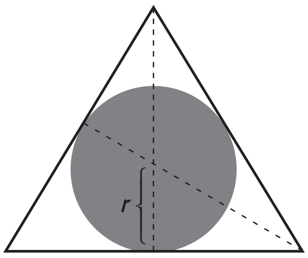
4



5



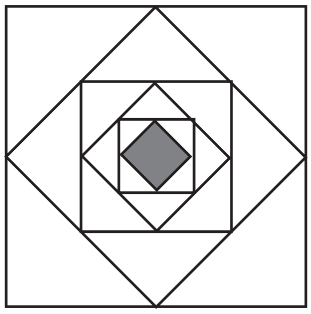
6



Hvor stor er delen?

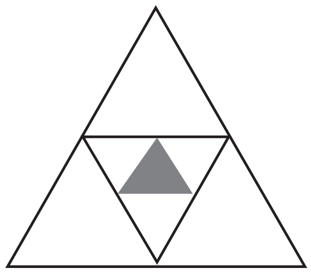
Hvor stor del av hele figuren utgjør den skyggelagte delen?
I hver figur er den lengste siden $4r$.

1



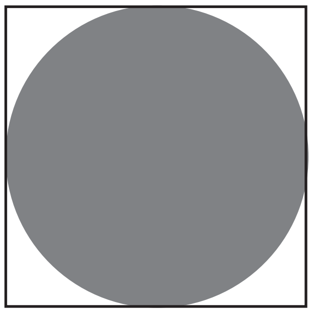
____

2



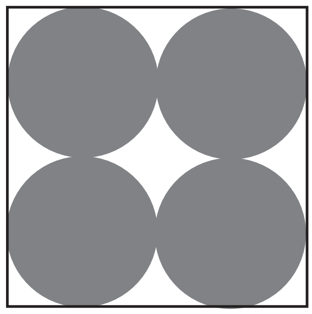
____

3



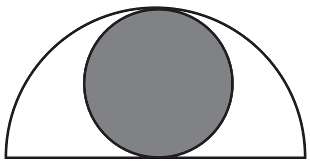
____

4



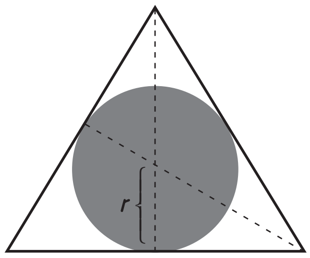
____

5



____

6



____